

УДК 532.5.031

doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-2

Парадокс описания движения гидродинамического разрыва с потенциальным и несжимаемым течением во внешней области

М. Л. Зайцев¹, В. Б. Аккерман²

¹Москва, Россия

²Университет Западной Вирджинии, Моргантаун, Соединенные Штаты Америки

¹mlzaytsev@gmail.com, ²Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Аннотация. Исследуются гидродинамические разрывы во внешнем потенциальном и несжимаемом течении. На примере фронта реакции в 2D-потоке получена переопределенная система уравнений, описывающих его движение в терминах самой поверхности. В предположении дополнительной гладкости гармонического потока, подходящего к разрыву, с помощью этих уравнений можно определить движение данного разрыва без учета влияния потока за фронтом, а также весь внешний поток. Хорошо известно, что при исчезающе малой вязкости тангенциальную и нормальную составляющие скорости связывает интегральное соотношение на границе (задачи Дирихле, Неймана). Зная одну из них вдоль границы разрыва, можно определить весь внешний поток. Однако в предположении гладкости внешнего потока это будет иметь место и для всех производных скорости по координатам и времени. Тогда возникает парадокс: зная положение разрыва и данные о скорости в точке на его поверхности, можно определить движение этого разрыва без учета влияния потока за фронтом, а также весь внешний поток. Пока нет физического объяснения данного механизма движения разрыва. Возможно, перед фронтом образуется пограничный слой, где существенную роль играет вязкость и нарушаются уравнения Эйлера. Приводится довод о том, что классическое представление о движении гидродинамических разрывов в потенциальном и несжимаемом течении во внешней области должно быть скорректировано.

Ключевые слова: гидродинамический разрыв, гидродинамика, уравнения Эйлера, уравнение Лапласа, потенциальное течение, формула Грина, интегро-дифференциальные уравнения

Для цитирования: Зайцев М. Л., Аккерман В. Б. Парадокс описания движения гидродинамического разрыва с потенциальным и несжимаемым течением во внешней области // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 11–30. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-2

Paradox of description for motion of a hydrodynamic discontinuity in a potential and incompressible flow

M.L. Zaytsev¹, V.B. Akkerman²

¹Moscow, Russia

²West Virginia University, Morgantown, United States of America

¹mlzaytsev@gmail.com, ²Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Abstract. Hydrodynamic discontinuities in an external potential and incompressible flow are investigated. Using the reaction front as an example in a 2D stream, an overdetermined system of equations is obtained that describes its motion in terms of the surface itself. Assuming that the harmonic flux approaching discontinuity is additional smooth, these equa-

tions can be used to determine the motion of this discontinuity without taking into account the influence of the flow behind the front, as well as the entire external flow. It is well known that for vanishingly low viscosity, the tangential and the integral relation on the boundary (Dirichlet, Neumann problems) connects normal component of the velocity. Knowing one of them along the boundary of the discontinuity, one can determine the entire external flow. However, assuming the external flow is smooth, this will also be the case for all derivatives of velocity with respect to coordinates and time. Then a paradox arises, knowing the position of the discontinuity and the velocity data at a point on its surface, it is possible to determine the motion of this discontinuity without taking into account the influence of the flow behind the front, as well as the entire external flow. There is no physical explanation for this mechanism. It is possible that a boundary layer is formed in front of the front, where viscosity plays a significant role and Euler equations are violated. It is argued that the classical idea of the motion of hydrodynamic discontinuities in the potential and incompressible flow in the external region should be corrected.

Keywords: hydrodynamic discontinuity, hydrodynamics, Euler equations, Laplace equation, potential flow, Green's formula, integral-differential equations

For citation: Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Paradox of description for motion of a hydrodynamic discontinuity in a potential and incompressible flow. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(3):11–30. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-2

Введение

Одним из важнейших вопросов, возникающих при решении множества гидродинамических задач, является описание движения разрывов [1–3]. В частности, тангенциальный разрыв встречается при описании гидродинамических неустойчивостей (Релея – Тейлора, Дарье – Ландау, Кельвина – Гельмгольца), гравитационных волн и других явлений [1–4]. Существуют различные уравнения для описания движения некоторых разрывов в различных приближениях [4–8]. Авторами также были предложены уравнения, описывающие движения некоторых разрывов [9–11]. Однако эти уравнения пока детально не исследованы численно и аналитически. При рассмотрении движения разрывов обычно полагается потенциальное течение перед фронтом. При этом возникает особенность математического характера, которая в корне может поменять представление о движении разрывов, распространяющихся в потенциальных и несжимаемых потоках. Хорошо известно, что при исчезающе малой вязкости тангенциальную и нормальную составляющие скорости связывает интегральное соотношение на границе (задачи Дирихле, Неймана) [12]. Зная одну из них вдоль границы разрыва, можно определить весь внешний поток. Однако в предположении гладкости внешнего потока это будет иметь место и для всех производных скорости по координатам и времени. Возникает парадокс. Тогда, зная положение разрыва и данные о скорости в точке на его поверхности, можно определить движение этого разрыва без учета влияния потока за фронтом, а также весь внешний поток.

В данной работе мы предлагаем систему уравнений для описания разрыва в частном случае фронта реакции, где этот парадокс проявляется.

Система уравнений для описания движения фронта реакции

Рассмотрим 2D-гидродинамический разрыв, распространяющийся во внешней области с потенциальным и несжимаемым течением единичной

плотности. Не ограничивая общности, положим, что распространяется фронт реакции (рис. 1). Рассмотрим уравнения гидродинамики в области перед разрывом «←», где присутствует потенциальное течение:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \nabla P = 0, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

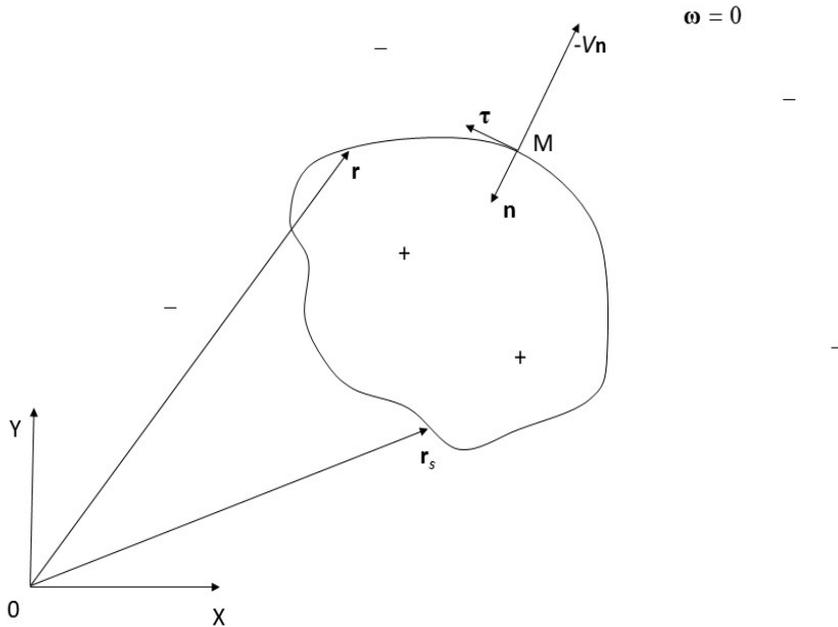


Рис. 1. Гидродинамический разрыв в потенциальном внешнем 2D-поток

Будем считать, что скорость жидкости и ее производные по времени и координатам достаточно гладко подходят к границе разрыва. Скорость жидкости в области перед разрывом «←» из (2), (3) имеет вид $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, $\Delta \varphi = 0$, где φ – потенциал скорости. На границе каждая точка M движется со скоростью $-V\mathbf{n}$, где \mathbf{n} – внутренняя нормаль к поверхности. Положим, что скорость плоского фронта реакции относительно неподвижного топлива равна единице, т.е.

$$\partial \varphi / \partial n + V = 1 \quad (4)$$

и $\mathbf{u}_\tau = \partial \varphi / \partial \tau$, где τ – единичный тангенциальный вектор к поверхности.

Рассмотрим в двумерной области перед разрывом «←» уравнение Лапласа для потенциала скорости φ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Продифференцируем (5) по времени t , получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0. \quad (6)$$

Тогда в предположении достаточной гладкости потока по координатам и времени, подходящего к разрыву, вдоль границы этого разрыва выполняются следующие соотношения (рис. 1) [9–12]:

$$\pi \varphi(\mathbf{r}, t) = \oint \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s), \quad (7)$$

$$\pi \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \oint \left[\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s \partial t} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial t} \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (8)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что [9]:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau} = -\frac{1}{R} \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \mathbf{n}, \quad (9)$$

где R – радиус кривизны в точке на фронте.

Также в предположении достаточной гладкости потока по координатам и времени имеем [9]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) = \left(\mathbf{n} \cdot \frac{d\nabla \varphi}{dt} \right) + \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \nabla \varphi \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial n} - V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad (11)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n}$ – производная по времени t по точкам фронта, движущимся со скоростью $-V\mathbf{n}$. Из формулы (5) следует, что на фронте

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = 0. \quad (12)$$

Имеем также, используя (9):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)' = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \right)' = \frac{\partial}{\partial \tau} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \varphi) = \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial \tau} \right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \tau} \cdot \nabla \varphi \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial \tau} \right)' = \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) = \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial \tau} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau} \cdot \nabla \varphi \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tau^3}\right)' &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}\right)' = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial \tau}\right) + \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial^2 \nabla \varphi}{\partial \tau^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\tau}}{\partial \tau^2} \cdot \nabla \varphi\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial \tau}\right) = \\ &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tau^3} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial n} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{R}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial n \partial \tau^2}\right)' &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial \tau}\right)' = \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial \tau}\right) + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \nabla \varphi}{\partial \tau^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \tau^2} \cdot \nabla \varphi\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial \tau}\right) = \\ &= -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial n \partial \tau^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{R}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \end{aligned} \quad (17)$$

...

где (...)′ означает дифференцирование величин строго вдоль границы разрыва.

Таким образом, величины $\partial \varphi(\mathbf{r}, t) / \partial t$ и $\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t) / \partial n \partial t$ в уравнении (8) по формулам (10)–(14) выражаются через $\partial \varphi / \partial n$ и φ и их производные по времени t – по движущимся точкам на границе разрыва и по самой границе разрыва τ .

Пусть движущаяся кривая, являющаяся границей разрыва, задается следующим образом (см. рис. 1): $x = x(t, \alpha)$, $y = y(t, \alpha)$, $\alpha \in [A, B]$. Каждая точка α , $\alpha \in [A, B]$, движется со скоростью $-V \mathbf{n}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -V \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \alpha) = \begin{pmatrix} x(t, \alpha) \\ y(t, \alpha) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Из дифференциальной геометрии следует:

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}\right|} = \boldsymbol{\tau}, \quad (19)$$

где s – длина кривой, отсчитываемая от фиксированной точки на этой кривой. Учитывая (9), имеем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \alpha} = \frac{\partial(-V \mathbf{n})}{\partial \alpha} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} \mathbf{n} - V \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \tau} \mathbf{n} + \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{V}{R} \boldsymbol{\tau}, \quad (20)$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \alpha \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2} \right) = \frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \alpha}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \alpha} = \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{V}{R}. \quad (21)$$

Используя данное определение кривой, запишем уравнение (7) в виде [12]:

$$\pi\varphi(\mathbf{r}(t, \alpha), t) = \int_A^B \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s(t, \alpha'), t)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s(t, \alpha') - \mathbf{r}(t, \alpha)| - \varphi(\mathbf{r}_s(t, \alpha'), t) \mathbf{n}_s(t, \alpha') \cdot \frac{\mathbf{r}_s(t, \alpha') - \mathbf{r}(t, \alpha)}{|\mathbf{r}_s(t, \alpha') - \mathbf{r}(t, \alpha)|^2} \right] \frac{\partial s}{\partial \alpha'} d\alpha'. \quad (22)$$

Продифференцируем (22) по времени t , используя (9), (18), (21) и теорему о дифференцировании определенного интеграла по параметру:

$$\begin{aligned} \pi \frac{d\varphi}{dt} = & \int_A^B \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \right) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{d}{dt} (\varphi(\mathbf{r}_s, t)) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] \frac{\partial s}{\partial \alpha'} d\alpha' + \\ & + \int_A^B \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \frac{(\mathbf{r}_s - \mathbf{r})(V\mathbf{n} - V_s\mathbf{n}_s)}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{(V\mathbf{n} - V_s\mathbf{n}_s)}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] \frac{\partial s}{\partial \alpha'} d\alpha' + \\ & + \int_A^B \left[-\varphi(\mathbf{r}_s, t) \left(\frac{\partial V_s}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} - 2 \frac{[\mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r})]}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^4} [(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}) \cdot (V\mathbf{n} - V_s\mathbf{n}_s)] \right) \right] \times \\ & \times \frac{\partial s}{\partial \alpha'} d\alpha' + \int_A^B \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] \frac{\partial s}{\partial \alpha'} \frac{V_s}{R} d\alpha', \quad (23) \end{aligned}$$

где R – радиус кривизны, $V = V(\mathbf{r}(t, \alpha), t)$ и $V_s = V(\mathbf{r}_s(t, \alpha'), t)$.

Вернемся в уравнении (23) к интегрированию по кривым:

$$\begin{aligned} \pi \frac{d\varphi}{dt} = & \oint \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \right) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{d}{dt} (\varphi(\mathbf{r}_s, t)) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) + \\ & + \oint \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \frac{(\mathbf{r}_s - \mathbf{r})(V\mathbf{n} - V_s\mathbf{n}_s)}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{(V\mathbf{n} - V_s\mathbf{n}_s)}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) + \\ & + \oint \left[-\varphi(\mathbf{r}_s, t) \left(\frac{\partial V_s}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} - 2 \frac{[\mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r})]}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^4} [(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}) \cdot (V\mathbf{n} - V_s\mathbf{n}_s)] \right) \right] dl(\mathbf{r}_s) + \\ & + \oint \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] \frac{V_s}{R(\mathbf{r}_s, t)} dl(\mathbf{r}_s). \quad (24) \end{aligned}$$

Уравнение (24) есть продифференцированное по времени t по движущимся точкам на границе разрыва уравнение (7). Получим с учетом (4), (10)–

(15) два разных уравнения (8), (24) для определения $\partial\varphi/\partial n$ и φ на фронте, для которых еще надо задавать краевые условия. Фактически производные $\frac{d}{dt}(\partial\varphi/\partial n)$ и $\frac{d\varphi}{dt}$ из них можно исключить. Тогда по формуле (4) определяется скорость фронта $-V\mathbf{n}$.

Еще уравнения получаются при дифференцировании по координатам. Рассмотрим еще раз в двумерной области перед разрывом уравнение Лапласа для потенциала скорости φ (5). Величины $\partial\varphi/\partial n$ и φ на границе разрыва связаны между собой формулой Грина (7) [12]. В области перед разрывом выполняются также соотношения подобно (6):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) = 0. \quad (26)$$

Для (25), (26) также можно выписать формулы Грина на границе разрыва:

$$\pi \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{r}) = \oint \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) (\mathbf{r}_s)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{r}_s) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s), \quad (27)$$

$$\pi \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\mathbf{r}) = \oint \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) (\mathbf{r}_s)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\mathbf{r}_s) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (28)$$

Преобразуем формулы (27), (28), используя очевидные соотношения на границе:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(n_x \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \tau_x \frac{\partial\varphi}{\partial \tau} \right), \quad (29)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(n_y \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \tau_y \frac{\partial\varphi}{\partial \tau} \right). \quad (30)$$

Имеем после подстановки (29) в (27),

$$\begin{aligned} & \pi \left(n_x \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \tau_x \frac{\partial\varphi}{\partial \tau} \right) (\mathbf{r}) = \\ & = \oint \left[\frac{\partial \left(n_x \frac{\partial\varphi}{\partial n_s} + \tau_x \frac{\partial\varphi}{\partial \tau_s} \right) (\mathbf{r}_s)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \left(n_x \frac{\partial\varphi}{\partial n_s} + \tau_x \frac{\partial\varphi}{\partial \tau_s} \right) (\mathbf{r}_s) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s), \end{aligned}$$

или

$$\pi \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \tau_x \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) (\mathbf{r}) = \oint \left[\left(n_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n_s^2} + \tau_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n_s \partial \tau_s} \right) \times \right. \\ \left. \times (\mathbf{r}_s) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} + \tau_x \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_s} \right) (\mathbf{r}_s) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s),$$

или, учитывая (12),

$$\pi \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \tau_x \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) (\mathbf{r}) = \oint \left[\left(-n_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_s^2} + \tau_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n_s \partial \tau_s} \right) \times \right. \\ \left. \times (\mathbf{r}_s) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} + \tau_x \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_s} \right) (\mathbf{r}_s) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (31)$$

Аналогично:

$$\pi \left(n_y \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \tau_y \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) (\mathbf{r}) = \oint \left[\left(-n_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_s^2} + \tau_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n_s \partial \tau_s} \right) \times \right. \\ \left. \times (\mathbf{r}_s) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \left(n_y \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} + \tau_y \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_s} \right) (\mathbf{r}_s) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (32)$$

Таким образом, с учетом (13)–(15) мы получили три интегро-дифференциальных уравнения (7), (31) и (32) на границе области разрыва для двух поверхностных неизвестных $\partial \varphi / \partial n$ и φ , по которым можно определить скорость фронта $-V\mathbf{n}$ из (4), а следовательно, и движение всего разрыва. В предположении, что поток подходит бесконечно гладко к разрыву, составляя уравнения типа (25), (26), но для старших производных, и используя (13)–(17), получаем бесконечно много интегро-дифференциальных уравнений для двух поверхностных неизвестных $\partial \varphi / \partial n$ и φ .

Как известно, гармоническая функция бесконечно дифференцируема внутри области определения [12]. Выделим некоторую область во внешнем течении, чтобы она целиком лежала вне фронта реакции. Тогда также на ее границе можно получить бесконечное множество интегро-дифференциальных соотношений всего для двух поверхностных неизвестных $\partial \varphi / \partial n$ и φ . Возможно, что не все эти уравнения независимы. Одни являются сложными следствиями других (см. приложение В).

Заключение

В данной работе мы в целом предложили способ снижения размерности в уравнении Лапласа, используя формулы Грина как дополнительные уравнения (см. приложение А). Это нужно для упрощения и проверки расчетов этого уравнения в приложениях. На примере фронта реакции в 2D-потоме получена переопределенная система уравнений, описывающих его движение в терминах самой поверхности. В предположении дополнительной гладкости

гармонического потока, подходящего к разрыву, можно определить движение этого разрыва без учета влияния потока за фронтом, а также весь внешний поток. Пока нет физического объяснения данного механизма движения разрыва. Возможно, перед фронтом образуется пограничный слой, где существенную роль играет вязкость и нарушаются уравнения Эйлера, т.е. терпят разрыв производные скорости потока по пространству и времени при подходе к разрыву. Это означает, что скачкообразно может меняться завихренность и колебаться плотность газа перед фронтом. Такое поведение потока возможно и за фронтом (см. Приложение С). Таким образом, классическое представление о движении гидродинамических разрывов в потенциальном и несжимаемом течении во внешней области должно быть скорректировано.

Приложение А. Интегральные соотношения на основе формулы Грина для других уравнений математической физики

Рассмотрим стационарное уравнение Лапласа (5) в некоторой области в \mathbb{R}^2 . Пусть в ней движется некоторая замкнутая поверхность со скоростью $-V\mathbf{n}$, ограничивающая область G (рис. 2). Тогда на поверхности выполняются уравнения (10), (11), где частной производной по времени нет, а также интегральные соотношения (7) и (24). Система уравнений (10), (11) без частной производной по времени равносильна уравнению Лапласа (5). Мы имеем систему уравнений (10), (11) переопределенную дополнительным соотношением (7). Для такой системы уравнений можно применить метод сокращения размерности, изложенный в работах [13, 14]. А именно при выполнении некоторого условия (равенства нулю решений некоторой системы интегральных уравнений [14]) получить переопределенную систему интегро-дифференциальных уравнений только на этой движущейся поверхности. Одним из этих уравнений является уравнение (24).

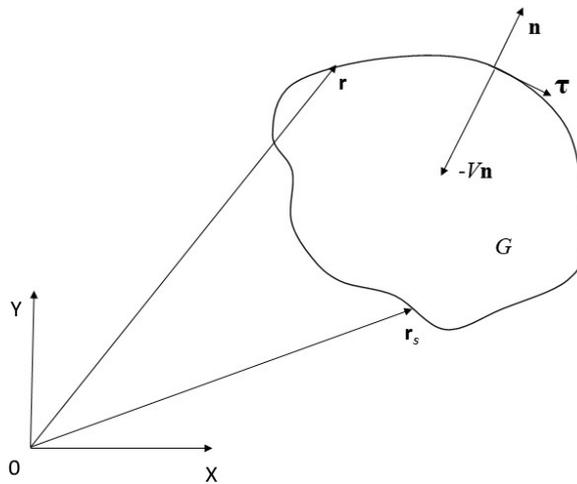


Рис. 2. Поверхность, ограничивающая область G

Фактически здесь используется только интегральная формула Грина для уравнения Лапласа. Можно по аналогии получить интегральные соотношения и для других уравнений с целью их переопределения, чтобы потом снизить в них размерность [13, 14].

Рассмотрим в двумерной области эволюционное уравнение диффузии вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta \varphi. \quad (33)$$

Введем функцию

$$\varphi = \Delta \psi,$$

следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (34)$$

Рассмотрим в области определения некоторую подвижную поверхность, ограничивающую область G (рис. 2). Для любой точки на этой поверхности выполняется формула Грина [12]:

$$\begin{aligned} \pi \varphi(\mathbf{r}, t) = & \oint \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) - \\ & - \int_G \Delta \varphi(\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2 \mathbf{r}_s. \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично на этой поверхности выполняется формула

$$\begin{aligned} \pi \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = & \oint \left[\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial t \partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) - \\ & - \int_G \Delta \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2 \mathbf{r}_s. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя формулы (33) и (34), находим, что

$$\begin{aligned} \pi \varphi(\mathbf{r}, t) = & \oint \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) - \\ & - \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2 \mathbf{r}_s, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \pi \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = & \oint \left[\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial t \partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) - \\ & - \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2 \mathbf{r}_s. \end{aligned} \quad (38)$$

Сравнивая (37) и (38), находим интегральное соотношение вида

$$\begin{aligned} \pi\varphi(\mathbf{r},t) = & \oint \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s,t)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s,t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) + \\ + \pi \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{r},t) - & \oint \left[\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r}_s,t)}{\partial t\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{r}_s,t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \end{aligned} \quad (39)$$

Интегральное соотношение (39) можно рассматривать как дополнительное уравнение связи к системе уравнений (33), (34). Фактически (39) есть формула Грина для уравнения $\Delta\left(\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$, получаемого из (33), (34). Аналогичным методом находится интегральное соотношение для волнового уравнения вида

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \Delta\varphi. \quad (40)$$

Рассмотрим следующую систему уравнений двумерной несжимаемой стационарной жидкости [1]:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (41)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (43)$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(u_x^2 + P)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial y} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial(u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y^2 + P)}{\partial y} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (46)$$

Введем функции

$$\Delta\psi_1 = u_x^2 + P, \quad \Delta\psi_2 = u_x u_y, \quad \Delta\psi_3 = u_y^2 + P, \quad (47)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Тогда уравнения (44), (45) можно представить в виде

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) = 0, \quad (48)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) = 0. \quad (49)$$

Мы получили систему уравнений (46)–(49). На любой замкнутой кривой в плоскости из (48), (49) можно выписать две интегральные формулы Грина, связывающие ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 и их производные.

Рассмотрим общие уравнения в виде [14]:

$$H_k(U_1^1, \dots, U_v^i, \dots, U_p^m, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, \mathbf{x}) = 0, \quad i = 1 \dots m, \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots p, \quad (50)$$

$$\frac{\partial U_v^i}{\partial x_m} = \frac{\partial U_v^m}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots (m-1), \quad v = 1 \dots p, \quad (51)$$

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = U_v^m, \quad v = 1 \dots p, \quad (52)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$.

Рассмотрим случаи $m = 3$ и $m = 4$. Введем функции

$$\Delta \psi_v^i = U_v^i, \quad \Delta \phi_v = S_v, \quad i = 1 \dots m, \quad v = 1 \dots p, \quad (53)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{m-1}^2}$.

Из уравнений (51), (52) следует, что

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi_v^i}{\partial x_m} - \frac{\partial \psi_v^m}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i = 1 \dots (m-1), \quad v = 1 \dots p, \quad (54)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial \phi_v}{\partial x_m} - \psi_v^m \right) = 0, \quad v = 1 \dots p. \quad (55)$$

Таким образом, мы имеем систему уравнений (50), (53)–(55). На любой замкнутой поверхности в пространстве \mathbb{R}^{m-1} из (54), (55) можно выписать mp интегральных формул Грина, связывающих ψ_v^i , ϕ_v , $i = 1 \dots m$, $v = 1 \dots p$ и их производных. Особенность данного переопределения заключается в том, что получаемые уравнения пониженной размерности интегральные и их решение определяется сразу во всей области определения исходной системы уравнений.

Заметим, что в формулах (53) можно взять просто $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ и получить из (54) и (55) дополнительные соотношения на некоторой кривой

в пространстве \mathbb{R}^2 . Остальные переменные $\mathbf{x} = (x_3, \dots, x_m)$ рассматриваются как параметры в интегральных формулах Грина. Тогда теоретически ничего не мешает сократить размерность в уравнениях (50), (53)–(55) и преобразовать их к системе интегро-дифференциальных уравнений на этой кривой [13, 14].

Приложение В. Некоторые интегральные тождества типа формул Грина

Рассмотрим некоторую замкнутую область $G \subset \mathbb{R}^2$ и функцию $\varphi(\mathbf{r}) \in C^\infty(\bar{G})$, определенную на ней (см. рис. 2). Для любой точки внутри области G выполняется формула Грина [12]:

$$2\pi\varphi(\mathbf{r}, t) = \oint \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) - \int_G \Delta\varphi(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s. \quad (56)$$

Запишем эту формулу для функции $\partial\varphi(\mathbf{r})/\partial x$:

$$2\pi \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{r}, t) = \oint \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial x} \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) - \int_G \Delta \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s. \quad (57)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_G \Delta \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s = \\ & = \int_G \frac{\partial}{\partial x_s} (\Delta\varphi(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|) d^2\mathbf{r}_s - \int_G \Delta\varphi(\mathbf{r}_s, t) \frac{\partial \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|}{\partial x_s} d^2\mathbf{r}_s = \\ & = \oint n_{xs} \Delta\varphi(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| dl(\mathbf{r}_s) + \int_G \Delta\varphi(\mathbf{r}_s, t) \frac{\partial \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|}{\partial x} d^2\mathbf{r}_s = \\ & = \oint n_{xs} \Delta\varphi(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| dl(\mathbf{r}_s) + \frac{\partial}{\partial x} \int_G \Delta\varphi(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s. \end{aligned} \quad (58)$$

Подставим (56) в (58), тогда для любой точки внутри области G получим

$$\int_G \Delta \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s = \oint n_{xs} \Delta\varphi(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| dl(\mathbf{r}_s) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \oint \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) - 2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}, t). \quad (59)$$

Подставим (59) в (57). Тогда после преобразований находим:

$$0 = \oint \left[\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) -$$

$$- \oint n_{xs} \Delta \varphi(\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| dl(\mathbf{r}_s) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \oint \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s),$$

или

$$0 = \oint \left[\left(-n_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_s^2} + \tau_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n_s \partial \tau_s} \right) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \right.$$

$$\left. - \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} + \tau_x \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_s} \right) (\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \oint \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (60)$$

Соотношение (60) выполняется для любых $\partial \varphi / \partial n$ и φ , определенных на поверхности области G , но для любых точек внутри этой области, поскольку дифференцирование под знаком интеграла в (60) возможно только для этих точек. В случае, когда точка лежит на границе области G в (60), рассматриваемом в данной статье, нужно проводить отдельное исследование.

Очевидно, что помимо (60), рассматривая другие производные от $\varphi(\mathbf{r})$, данным методом можно получить бесконечное число подобных интегральных тождеств.

Приложение С. О структуре гидродинамического потока, вызываемого движением фронта реакции

Рассмотрим движение фронта реакции, который распространяется из точки зажигания во внешнем несжимаемом 2D-потоке (рис. 1). Обозначим область перед фронтом G_- и область за фронтом G_+ . Обозначим скорость газа в области перед разрывом G_- как \mathbf{u}_- , а в области за разрывом G_+ как \mathbf{u}_+ . Пусть внешний поток потенциален $\boldsymbol{\omega}_- = \nabla \times \mathbf{u}_- = 0$ и имеет вид $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, $\Delta \varphi = 0$, где φ – потенциал скорости.

Пусть при переходе через фронт реакции скорость терпит разрыв, т.е.

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = (\Theta - 1)\mathbf{n}, \quad (61)$$

где $\Theta = \rho_-/\rho_+ > 1$ – скачок плотности газа через разрыв; ρ_- – плотность газа перед фронтом; ρ_+ – плотность газа за фронтом; \mathbf{n} – внутренняя нормаль к поверхности.

Предположим, что потоки скоростей таковы, что

$$\mathbf{u}_- \in C^1(G_-) \cap C(\bar{G}_-), \quad \mathbf{u}_+ \in C^2(\bar{G}_+). \quad (62)$$

Пусть $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. Рассмотрим поле скоростей:

$$\mathbf{u}_v = \frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s. \quad (63)$$

В силу (62) можно воспользоваться формулой Остроградского – Гаусса [12] в выражении (63):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_v &= \frac{1}{2\pi} \int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \times \nabla_{\mathbf{r}} (\ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|) d^2\mathbf{r}_s = -\frac{1}{2\pi} \int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \times \nabla_{\mathbf{r}_s} (\ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|) d^2\mathbf{r}_s = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \times \mathbf{n}_s) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| dl(\mathbf{r}_s) + \frac{1}{2\pi} \int_{G_+} (\nabla_{\mathbf{r}_s} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t)) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s. \end{aligned} \quad (64)$$

Из (64) и свойств потенциала простого слоя и объемного потенциала [12] следует, что поток \mathbf{u}_v непрерывен через фронт и может быть доопределен так, что

$$\mathbf{u}_{v-} \in C^1(\bar{G}_-), \quad \mathbf{u}_{v+} \in C^1(\bar{G}_+), \quad (65)$$

где $\mathbf{u}_{v-} = \mathbf{u}_v$ в области перед разрывом G_- , $\mathbf{u}_{v+} = \mathbf{u}_v$ в области за разрывом G_+ . Имеем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_v &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{u}_v = \frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\mathbf{r}} \left(\int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s \right) - \\ &- \frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2\mathbf{r}_s \right). \end{aligned} \quad (66)$$

В силу того, что выполняется (62), $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{u}] = 0$ в области G_+ и $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) = 0$ на фронте, то, воспользовавшись формулой Остроградского – Гаусса, имеем,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2 \mathbf{r}_s \right) = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_s} (\ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|) d^2 \mathbf{r}_s \right) = \\
 & = -\frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \oint (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \cdot \mathbf{n}_s) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| dl(\mathbf{r}_s) - \\
 & -\frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \int_{G_+} (\nabla_{\mathbf{r}_s} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t)) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2 \mathbf{r}_s = 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\mathbf{r}} \left(\int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2 \mathbf{r}_s \right) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in G_-, \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t), & \mathbf{r} \in G_+. \end{cases} \quad (67)$$

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{u}_p = \mathbf{u} - \mathbf{u}_v$. Оно потенциально в областях G_- и G_+ , так как согласно (67) $\nabla \times \mathbf{u}_p = \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{u}_v = 0$. Кроме того, учитывая (63) и предположение о несжимаемости рассматриваемых потоков перед и за фронтом, имеем $\nabla \cdot \mathbf{u}_p = \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{u}_v = 0$. Следовательно, $\mathbf{u}_p = \nabla \phi_p$, $\Delta \phi_p = 0$ в областях G_- и G_+ . С учетом (62) и (65) должно быть:

$$\phi_{p-} \in C^2(G_-) \cap C^1(\bar{G}_-) \text{ и } \phi_{p+} \in C^2(\bar{G}_+), \quad (68)$$

где $\phi_{p-} = \phi_p$ – в области перед разрывом G_- , $\phi_{p+} = \phi_p$ – в области за разрывом G_+ . Из (61) и (64) следует, что тангенциальная составляющая потока $\mathbf{u}_p = \partial \phi_p / \partial \tau$ не меняется при переходе через фронт. Поскольку $\phi_{p+} \in C^2(\bar{G}_+)$, из (68) следует:

$$\phi_{p-} \in C^2(G_-) \cap C^1(\bar{G}_-) \text{ и } \phi_{p+} \in C^2(G_+) \cap C^1(\bar{G}_+). \quad (69)$$

В работе [6] показывается, что, если верно (69) и есть разрыв (61), то потенциал ϕ_p в областях G_- и G_+ является потенциалом Франкеля [15]:

$$\phi_p = \frac{1}{2\pi} \oint (\Theta - 1) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| dl(\mathbf{r}_s). \quad (70)$$

Потенциал ϕ_p , определяемый формулой (70), является потенциалом простого слоя [12]. Из свойств этого потенциала следует, что в общем случае он не является дважды непрерывно дифференцируемым в замыкании \bar{G}_+ . Следовательно, условия (68) могут нарушаться.

Таким образом, возникает следующий парадокс: в общем случае гидродинамического потока в условиях (61), (62) вообще не существует. Возможно вдоль некоторой поверхности в области за фронтом \bar{G}_+ образуется разрыв непрерывности у скорости \mathbf{u}_+ и/или ее производных.

Умножим обе части формулы (61) на вектор \mathbf{n} и проинтегрируем формулу (61) вдоль поверхности фронта реакции. Имеем,

$$\oint (u_{n+} - u_{n-}) dS = \oint (\Theta - 1) dS, \quad (71)$$

или

$$\oint u_{n+} dS - \oint u_{n-} dS = (\Theta - 1) S, \quad (72)$$

или, учитывая формулу Остроградского – Гаусса:

$$-\int_{G_+} \operatorname{div} \mathbf{u} dV - \oint u_{n-} dS = (\Theta - 1) S, \quad (73)$$

или, пользуясь (3):

$$\oint u_{n-} dS = -(\Theta - 1) S, \quad (74)$$

где S – площадь поверхности фронта реакции.

Мы имеем дополнительное соотношение (74) на поверхности фронта, зависящее от $\Theta = \rho_-/\rho_+$ и учитывающее структуру потока в продуктах реакции. Оно может быть использовано вместе с уравнениями (8), (24) для определения краевых условий к ним. Выражение (74) также может быть продифференцировано по времени на движущейся поверхности фронта. Таким образом могут быть получены еще соотношения на поверхности, необходимые для замыкания системы (8), (24). Можно также использовать тот факт, что за фронтом выполняется еще соотношения вида

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0, \quad (75)$$

и получать еще соотношения на поверхности, используя уже уравнения Эйлера за фронтом.

В классической постановке задачи о движении фронта реакции перед фронтом ставится задача Неймана для внешнего потока, т.е. решение для потенциала скорости жидкости ищется в пространстве функций $C^2(G_-) \cap C^1(\bar{G}_-)$. За фронтом тоже решение ищется в каких-то пространствах функций. В данной статье область за фронтом не рассматривается, но ставится задача в области G_- , которая является сужением задачи Неймана, т.е. решение ищется в пространстве функций $C^2(\bar{G}_-)$. Из-за этого получается замкнутая система уравнений фронта. В уравнениях Эйлера стоят вторые

производные от потенциала скорости. Вопрос заключается в том, верны ли уравнения Эйлера вплоть до границы или производные скорости и давления терпят разрыв непрерывности на границе разрыва. В первом случае получается, что можно определить весь поток в области G_- , не решая уравнения гидродинамики за фронтом. Возможно, поток за фронтом может быть учтен через краевые или дополнительные условия на его поверхности (см. (74)). Во втором случае необходимо дополнительно исследовать поток перед фронтом, учитывая все процессы перед фронтом. Пока неизвестно, какие именно математические задачи нужно ставить для описания движения гидродинамических разрывов (Неймана, Дирихле, Коши и др.).

Мы получили, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_v$, где $\mathbf{u}_p = \nabla \phi_p$ (см. (70)), $\mathbf{u}_v = \nabla_{\mathbf{r}} \times \Psi$, $\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_{G_+} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| d^2 \mathbf{r}_s$, $\Delta \Psi = 0$ в области G_- . Можно показать из

свойств потенциала простого слоя и объемного потенциала, что $\Psi \in C^2(\bar{G}_-)$. Следовательно, как показывается в данной статье, на поверхности фронта можно определить каждую компоненту вектор-функции Ψ и все ее пространственные производные. Тогда по формуле (4) или $\partial \phi_p / \partial n + (\mathbf{n} \cdot [\nabla \times \Psi]) + V = 1$ можно найти скорость движения фронта реакции. Для существования данного разложения поля скоростей достаточно потребовать:

$$\mathbf{u}_- \in C^2(G_-) \cap C(\bar{G}_-), \mathbf{u}_+ \in C^2(G_+) \cap C(\bar{G}_+)$$

и

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}_+ \in C(\bar{G}_+).$$

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Гидродинамика. М. : Наука, 1986. Т. VI. 736 с.
2. Williams F. A. Combustion Theory. Westview Press, 1985.
3. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М. : Наука, 1980. 478 с.
4. Ott E. Nonlinear evolution of the Rayleigh-Taylor instability of thin layer // Physical Review Letters. 1972. Vol. 29. P. 1429–1432.
5. Sivashinsky G. I. Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames. Derivation of basic equations // Acta Astronautica. 1977. Vol. 4. P. 1177–1215.
6. Bychkov V., Zaytsev M., Akkerman V. Coordinate-Free Description of Corrugated Flames with Realistic Gas Expansion // Physical Review E. 2003. Vol. 68. P. 026312–026324.
7. Book D. L., Ott E., Sulton A. L. Rayleigh-Taylor instability in the «shallow-water» approximation // Physics of Fluids. 1974. Vol. 17, № 4. P. 676–678.
8. Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. On-shell description of unsteady flames // Journal of Fluid Mechanics. 2008. Vol. 608. P. 217.
9. Зайцев М. Л., Аккерман В. Б. К нелинейной теории движения поверхностей гидродинамических разрывов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 135, № 4. С. 800–819.

10. Зайцев М. Л., Аккерман В. Б. Метод описания стационарного фронта реакции в двухмерном потоке // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2010. Т. 92, № 11. С. 813–816.
11. Зайцев М. Л., Аккерман В. Б. Нелинейное описание движения фронта реакции // Труды МФТИ. 2010. Т. 2, № 2. С. 92–100.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966. 742 с.
13. Аккерман В. Б., Зайцев М. Л. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1518–1530.
14. Зайцев М. Л., Аккерман В. Б. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20. № 4. С. 43–67.
15. Frankel M. An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows // *Physics Fluids A*. 1990. Vol. 2. P. 1879–1886.

References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: Gidrodinamika = Theoretical Physics: Hydrodynamics*. Moscow: Nauka, 1986;VI:736. (In Russ.)
2. Williams F.A. *Combustion Theory*. Westview Press, 1985.
3. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. *Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva = Mathematical theory of combustion and explosion*. Moscow: Nauka, 1980:478. (In Russ.)
4. Ott E. Nonlinear evolution of the Rayleigh-Taylor instability of thin layer. *Physical Review Letters*. 1972;29:1429–1432.
5. Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames. Derivation of basic equations. *Acta Astronautica*. 1977;4:1177–1215.
6. Bychkov V., Zaytsev M., Akkerman V. Coordinate-Free Description of Corrugated Flames with Realistic Gas Expansion. *Physical Review E*. 2003;68:026312–026324.
7. Book D.L., Ott E., Sulton A.L. Rayleigh-Taylor instability in the «shallow-water» approximation. *Physics of Fluids*. 1974;17(4):676–678.
8. Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. On-shell description of unsteady flames. *Journal of Fluid Mechanics*. 2008;608:217.
9. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. On the nonlinear theory of motion of surfaces of hydrodynamic discontinuities. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2009;135(4):800–819. (In Russ.)
10. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Method for describing a stationary reaction front in a 2D flow. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2010;92(11):813–816. (In Russ.)
11. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Nonlinear description of the movement of the reaction front. *Trudy MFTI = Proceedings of MIPT*. 2010;2(2):92–100. (In Russ.)
12. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Upravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1966:742. (In Russ.)
13. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Dimension reduction in hydrodynamic equations. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics*. 2011;51(8):1518–1530. (In Russ.)
14. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduction of overdetermined systems of differential equations of mathematical physics. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovaniye = Mathematical physics and computer modeling*. 2017;20(4):43–67. (In Russ.)
15. Frankel M. An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows. *Physics Fluids A*. 1990;2:1879–1886.

Информация об авторах / Information about the authors

Максим Леонидович Зайцев
индивидуальный предприниматель
(Россия, г. Москва)

E-mail: mlzaytsev@gmail.com

Maksim L. Zaytsev
Individual Entrepreneur
(Moscow, Russia)

Вячеслав Борисович Аккерман
кандидат физико-математических наук,
профессор, PhD, Университет Западной
Вирджинии (Соединенные Штаты
Америки, г. Моргантаун)

E-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Vyacheslav B. Akkerman
Candidate of physical and mathematical
sciences, professor, PhD,
West Virginia University
(Morgantown, United States of America)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 21.12.2022

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.04.2023

Принята к публикации / Accepted 29.05.2023